Leçon 153 : Polynôme d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un espace vectoriel en dimension finie. Applications.

Mansuy
Rombaldi

Dans la suite de la leçon, on considère E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ avec $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$. On considèrera de plus un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.

I. Généralités sur les polynômes d'endomorphisme

Définition 1.1 Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$. On définit alors $P(u)$ comme l'endomorphisme de E défini par $P(u) = \sum_{i=0}^{k} a_i u^i$ où pour $i \in [\![1, k]\!]$, $u^i = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{i \text{ fois}}$.

Définition 1.2 On note $\mathbb{K}[u]$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée des polynômes de u i.e. $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Remarque 1.3 L'algèbre $\mathbb{K}[u]$ est commutative et $\mathcal{L}(E)$ étant de dimension n^2, on a $\dim(\mathbb{K}[u]) \leq n^2$.

Définition 1.4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, on définit $P(A) = \sum_{i=0}^{k} a_i A^i$. On note $\mathbb{K}[A]$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendrée par A.

Remarque 1.5 On vérifie facilement que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans une base $\mathcal{B}$ alors $P(A)$ est la matrice de $P(u)$ dans $\mathcal{B}$.

Définition 1.6 Un polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$ est un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.

Remarque 1.7 L'espace $\mathcal{L}(E)$ étant de dimension finie, tout endomorphisme admet un polynôme annulateur.

Définition 1.8 On a un morphisme surjectif $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[u]$, $P \mapsto P(u)$. Alors I_u l'ensemble des polynômes annulateurs de u, en tant que noyau de φ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ principal. On définit π_u, polynôme minimal de u, comme le générateur unitaire de I_u.

Exemples 1.9

- Soit s une symétrie alors $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur et $\pi_s = X^2 - 1$
- Soit p un projecteur alors $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p et $\pi_p = X^2 - X$
- L'unique endomorphisme admettant $aX + b$ comme polynôme annulateur avec $a \neq 0$ est l'homothétie de rapport $-a^{-1}b$

Remarque 1.10 En dimension infinie, il existe des endomorphismes qui n'admettent pas de polynôme annulateur non nul. (exemple : la dérivation usuelle)

Proposition 1.11 Un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement s'il admet un monôme pour polynôme minimal.

Théorème 1.12. L'espace vectoriel $\mathbb{K}[u]$ est de dimension égale au degré du polynôme annulateur π_u.

Théorème 1.13 Pour tout polynôme annulateur P de u, $Sp(u) \subset P^{-1}(\{0\})$ et dans le cas particulier du polynôme minimal, $Sp(u) = \pi_u^{-1}(\{0\})$.

Définition 1.14 On définit le polynôme caractéristique de u, noté χ_u, comme étant $\chi_u = \det(u - X\,id_E) \in \mathbb{K}[X]$.

Exemple 1.15
Soit $P = \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i + X^k$ et sa matrice compagnon $C(P) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$
alors :
$$\pi_{C(P)} = \chi_{C(P)} = (-1)^n P$$

Théorème 1.16 [Cayley-Hamilton] Soit χ_u le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\chi_u(u) = 0$.

Corollaire 1.17 Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.

Remarque 1.18 Le théorème de Cayley-Hamilton nous donne un moyen de calculer les puissances de u et dans le cas où u est inversible, de calculer l'inverse de u, $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

II. Les polynômes d'endomorphismes au service de la réduction

Lemme 2.1 [Lemme des noyaux] Soient r un entier supérieur ou égal à 2, $P_1, \dots, P_r$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$. Alors $\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i(u)$.

1. Diagonalisation des endomorphismes

Définition 2.2 Un endomorphisme est dit diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Remarque 2.3 Autrement dit, un endomorphisme est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres pour cet endomorphisme, i.e. si l'espace est somme directe des sous-espaces propres.

Exemple 2.4 Si u est diagonalisable et admet une unique valeur propre alors u est une homothétie.

Théorème 2.5 Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si, f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Exemples 2.6

- une symétrie s est diagonalisable car annulé par $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$
- un projecteur p est diagonalisable car annulé par $X^2 - X = X(X-1)$
- un endomorphisme nilpotent diagonalisable est nul

Application 2.7 Un endomorphisme de rang 1 est diagonalisable, si et seulement si sa trace est non nulle.

Application 2.8 [Burnside] Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. Si G est d'exposant fini N alors G est fini.

développement

2. Trigonalisation des endomorphismes

Définition 2.9 Un endomorphisme est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Exemple 2.10 Tout endomorphisme nilpotent admet dans une base adaptée une matrice triangulaire strictement supérieure.

Théorème 2.11 Les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est trigonalisable
- π_u scindé dans $\mathbb{K}$
- u admet un polynôme annulateur scindé

Corollaire 2.12 Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos alors tout endomorphisme est trigonalisable.

Corollaire 2.13 Soit u un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ alors :

- la trace de u est la somme des valeurs propres avec la multiplicité
- le déterminant de u est le produit des valeurs propres avec multiplicité

III. Applications

1. Application à l'exponentielle matricielle

On se place dans le cadre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Théorème 3.1 [Dunford] Soit u un endomorphisme tel que χ_u soit scindé dans $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple (d, n) tel que d diagonalisable, n nilpotent, d et n commutent et $u = d + n$. De plus, d et n sont des polynômes en u.

Théorème 3.2 Sous les hypothèses précédentes, e^u admet pour décomposition de Dunford $e^u = e^d + e^d(e^v - id_E)$.

Corollaire 3.3 L'endomorphisme u est diagonalisable, si et seulement si, e^u est diagonalisable.

développement

Théorème 3.4 Pour tout endomorphisme u inversible, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $e^{Q(u)} = u$.

2. Applications aux chaînes de Markov

Définition 3.5 Une matrice $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont à valeurs dans $[0,1]$ et pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, $\sum_{j=1}^{m} q_{i,j} = 1$.

Application 3.6 Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de mesure initiale ν_0 et de noyau de transition $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Si ν_n est la loi de X_n alors $\nu_n = \nu_0 P^n$ et donc si on a un polynôme annulateur de P, on peut simplifier le calcul de ν_n.

Définition 3.7 On dit que $(X_n)_n$ (ou P) est irréductible si : $\forall i,j \in [\![1,m]\!]$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $q_{i,j}^n > 0$.

Théorème 3.8 [Perron - Frobenius] Soit A une matrice irréductible et positive. Alors $\rho(A)$ est une valeur propre, de sous-espace propre de dimension 1 admettant un vecteur propre strictement positif.

Application 3.9 Si $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov sur $[\![1,m]\!]$ de mesure initiale ν_0 et de matrice P irréductible, alors elle admet une unique mesure invariante ν.

développement ?

- réduire (I) et ajouter s.e.v stables après le lemme des noyaux ?
- retirer les chaînes de Markov ?